

Aula 3.

→ fácil ver que essas eqs se reduzem às eqs de Newton usuais no caso de 1 partícula s/vínculos (em qq sistema de coordenadas!)

ex: (cartesiana): $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z \rightarrow Q_1 = F_x, Q_2 = F_y, Q_3 = F_z$

3D

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{q}_i$$

$$\therefore \text{Eqs Lagr. Gen} \Rightarrow m\ddot{q}_i = F_i$$

ex 2: (polares): $q_1 = r, q_2 = \theta; T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

2D

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r}; \frac{d}{dr} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = F_r \quad Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = \vec{F} \cdot (r\hat{e}_\theta) = r\vec{F}_\theta \rightarrow \text{note que } Q_\theta \text{ não tem dimensão de força}$$

$$\text{eqs Lagr. : } m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r$$

$$mr\ddot{\theta} = F_\theta - 2m\dot{r}\dot{\theta} \quad \left(\Leftrightarrow \underbrace{rF_\theta}_{(\vec{r} \times \vec{F})_z} = \frac{d}{dt} \underbrace{(mr^2\dot{\theta})}_{L_z} \right)$$

reforçando: as eqs derivadas acima valem em todos os casos c/ vínculos ideais

As eqs acima cumprem os 3 requisitos p/ uma teoria eficiente, mas ainda exigem que saiba escrever a força $\vec{F}_i$ sobre cada partícula, para só então se calcular as forças generalizadas Q_k . Uma simplificação adicional é possível, porém, no importante caso em que as forças aplicadas são conservativas, ie $\exists V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ tal que:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$$

Nesse caso

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \sum_{a=x,y,z} \frac{\partial V}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Como V não depende de $q_1, \dots, q_n$, então

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad L \equiv T - V$$

L = "Lagrangiana"

- contêm apenas forças aplicadas
- escritas em termos de um n.º mínimo de coords.
- dependem apenas de funções escalares
- têm a mesma forma em qq sistema de coords. generalizadas (v. demonstr. no texto)

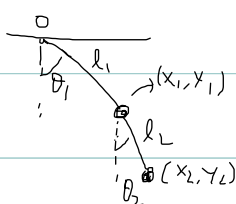
exercício: escrever L e obter as eqs. de mov. p/ o pêndulo duplo.

Exemplos e generalizações

1.5. Exemplos

- pêndulo duplo (p/ comparar com dedução da 1ª aula)
- mais um exemplo (dif do Nivaldo) p/ ilustrar casos-limite e necessidade de escolher L com respeito a um ref. inercial
- potenciais generalizados
- função de dissipação de Rayleigh

Pêndulo duplo



vínculos: $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$; $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = -l_1 \cos \theta_1; \quad x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2$$

usando coords θ_1, θ_2 :

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \overbrace{[\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2]}^{\cos(\theta_1 - \theta_2)} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1$$

$$V = -g(m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$\rightarrow (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{l}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \overbrace{[\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2]}^{\cos(\theta_1 - \theta_2)} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1$$

$$V = -g(m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

CASOS-limite : $m_2 \rightarrow 0$ ou $m_1 \rightarrow \infty$: $\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin \theta_1$ (pend simples compr. l_1)

2ª eq: $\ddot{\theta}_2$ é afetada! (dividindo por m_2 some a dependência com as massas!)

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2} \sin \theta_2 + \frac{g}{l_2} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 \frac{l_1}{l_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

1.6 Generalizações das eqs. de Lagrange

Vimos até agora que as eqs. de Lagrange valem p/ sistemas c/ vínculos ideais e forças conservativas $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

Vamos ver agora algumas situações mais gerais onde elas também podem ser aplicadas,

- (alguns) Potenciais dependentes de velocidades
- (alguns) casos com forças dissipativas

Suponha que as forças generalizadas possam ser escritas na forma

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{para algum } \overbrace{U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)}^{\text{pot. generalizado}}$$

$$\text{então } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \boxed{\text{eqs. de Lagrange satisfeitas p/ } L = T - U}$$

exemplo mais importante: eletromagnetismo! (partícula em campos $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$ dados

(ou $\phi, \vec{A}(\vec{r}, t)$ dados, já que: $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\text{dedução: } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\text{F. de Lorentz: } \vec{F}_L = \overset{\substack{\vec{p} \text{ é constante}}}{e} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = e \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \quad (\text{CGS})$$

Queremos deduzir $\vec{F}_L$ de uma Lagrangiana.

$$\text{Usando } \boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{A})} \quad \cdot \quad \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

$$\Rightarrow \text{com } \vec{a} = \vec{v}, \vec{b} = \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{A}) \quad \left(\text{pois } \frac{\partial V_i}{\partial r_j} = 0 \right)$$

$$\rightarrow \vec{F}_L = e \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{1}{c} \left[\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right] \right)$$

$$= e \left[-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{d}{dt} \left[\vec{\nabla}_v \left(\phi - \frac{\vec{v} \cdot \vec{A}}{c} \right) \right] \right]$$

$\rightarrow$ pois ϕ indep de $\vec{v}$, e $\vec{\nabla}_v (\vec{v} \cdot \vec{f}(\vec{r})) = \vec{f}(\vec{r})$

$\therefore$ tomando coordenadas cartesianas, vemos que

$$Q_k = F_k = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \text{ com } \boxed{U = e \left[\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right]}$$

pot. generalizado da força eletromagnética

(obs: não confundir! $\phi, A \leftrightarrow \vec{E}, \vec{B}$)

$\searrow$
 $U_{em} \rightarrow F$

U_{em} não determina os campos, só a força

$$\therefore \boxed{L = \frac{1}{2} m v^2 - e \phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}}$$

$\rightarrow$ note que vale em qq sistema de coordenadas

se $Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} + Q'_k$, onde $U = \text{pot. gen}$ e Q'_k

não provém de um U , então

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \quad ; \quad L = T - U$$

Função de dissipação de Rayleigh

podemos também incorporar forças dissipativas (atrito) lineares na velocidade no formalismo lagrangeano, ie, da forma

$$\vec{F}'_{ia} = -k_{ia} \vec{v}_{ia} \quad , \quad i=1 \dots N; \quad a=x,y,z$$

Probl: como lidar c/ dissipação se usamos outras coords. gen. (n cartesianas)

Def: $\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_{ix} v_{ix}^2 + k_{iy} v_{iy}^2 + k_{iz} v_{iz}^2$ "função de dissip"

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ia}} = -F'_{ia}$$

Interpret: potência dissipada:

$$\frac{dW'}{dt} = \sum_i \vec{F}'_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}'_i \cdot \vec{v}_i = -\sum_{i,a} k_{ia} v_{ia}^2 = -2\mathcal{F}$$

em outro sistema de coords. gen. :

$$\text{Força gen. : } Q'_k = \sum_i \vec{F}_i' \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \vec{F}_i' \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = - \sum_i \sum_a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ia}} \frac{\partial v_{ia}}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

Assim, em qualquer sistema de coords. gen. :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

ex: pêndulo simples amortecido : $L = \frac{m l^2 \dot{\theta}^2}{2} + m g l \cos \theta$

$$k_x = k_y \equiv k$$

$$\vec{F} = -k \vec{v}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} k v^2 = \frac{1}{2} k l^2 \dot{\theta}^2$$

$\therefore$ eqs mov: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \dot{\theta}$